Početní část 2 - 21.1.2021

3. První limitu spočítáme snadno l'Hospitaloým pravidlem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{1}=1$$

Ve druhém případě se jedná o standardní limitu typu 1^∞:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\right)^{\frac{1}{\sinh(\frac{\sin^3 x}{x})}}\\
&=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\right)}{\sinh(\frac{\sin^3 x}{x})}\\
&=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\right)}{\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}}\frac{\frac{\sin^3 x}{x}}{\sinh(\frac{\sin^3 x}{x})}\frac{\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}}{\frac{\sin^3 x}{x}}\\
&=\exp\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x(1+\cos^2 x)}=\exp\frac{1}{2}=\sqrt{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

Třikrát jsme použili větu o limitě složené funkce. Dvakrát s podmínkou (P) pro vniřtní funkce po řadě $\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$ a $\frac{\sin^3 x}{x}$ (platnost podmínky je víceméně triviální) a nakonec s podmínkou (S) s vnější funkcí e^x (spojitá na $\mathbb{R}$).

4. Racionální funkce od $\sin x$ a $\cos x$ nemá symetrie, používáme tedy nejobecnější substituci $t=\tan\frac{x}{2}$, při které bude integrál existovat na $(-\pi,\pi)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, což nám stačí.

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x+5}\,\mathrm{d}x\\
&=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\\
&=2\int\frac{t^2+2t-1}{(1+t^2)(3t^2+2t+7)}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{2}{5}\int\frac{3t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t+\frac{2}{5}\int\frac{2-9t}{3t^2+2t+7}\\
&=\frac{3}{5}\int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1}-\frac{2}{5}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}-\frac{3}{5}\int\frac{(6t+2)\,\mathrm{d}t}{3t^2+2t+7}+2\int\frac{\mathrm{d}t}{3t^2+2t+7}\\
&=\frac{3}{5}\log\left(\frac{t^2+1}{3t^2+2t+7}\right)-\frac{2}{5}\arctan t+\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3t+1}{2\sqrt{5}}\right)+C\\
&=\frac{3}{5}\log\left(\frac{\tan^2(\frac{x}{2})+1}{3\tan^2(\frac{x}{2})+2\tan(\frac{x}{2})+7}\right)-\frac{x}{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3\tan(\frac{x}{2})+1}{2\sqrt{5}}\right)+C
\end{aligned}$$